3.11) $S = nul(A)$

$S^{\perp} = nul(A)^{\perp} = fil(A) = col(A^T)$

Si tomo un $y \in fil(A) \rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^m$ tq $y = A^T x$

Si tomo $z \in nul(A) \rightarrow Az = 0$

Con el PI canónico: $(u,v) = v^T u = u^T v$

~~Como~~

$(y,z) = (A^T x, z) = (A^T x)^T z = x^T \underbrace{A\, z}_{=0} = 0$

Entonces $y \in nul(A)^{\perp}$ y $fil(A) = col(A^T) \subseteq nul(A)^{\perp}$

Ahora, $rg(A) = rg(A^T)$

$\rightarrow \dim(nul(A)^\perp) \geq \dim(col(A^T)) = rg(A) = rg(A^T)$

Por T. de la dimensión:

$$n - rg(A) = \dim(nul(A)) \rightarrow rg(A) = n - \dim(nul(A))$$

~~[illegible]~~

$\rightarrow \dim(nul(A)^\perp) \geq n - \dim(nul(A))$

$\rightarrow \dim(nul(A)^\perp) + \dim(nul(A)) \geq n$

Como $nul(A) + nul(A)^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$n \leq \dim(nul(A)^\perp) + \dim(nul(A)) \leq n$$

Por lo tanto

$\dim(nul(A)^\perp) + \dim(nul(A)) = n$

$\rightarrow \dim(nul(A)^\perp) = n - \dim(nul(A))$

Como vimos que $col(A^T) \subseteq nul(A)^\perp$

y vemos que los subesp. tienen igual dimensión,

entonces $\rightarrow$ $col(A^T) = fil(A) = nul(A)^\perp = S^\perp$

Como $nul(A) \cap nul(A)^\perp = \{0\}$, usando T. de la dimensión

p/ la suma de subespacios:

$\dim(nul(A) \oplus nul(A)^\perp) = \dim(nul(A)) + \dim(nul(A)^\perp) = n$

Entonces como $nul(A) \oplus nul(A)^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\dim(nul(A) \oplus nul(A)^\perp) = n$

$$S \oplus S^\perp = nul(A) \oplus nul(A)^\perp = \mathbb{R}^n. \checkmark$$